

Das Mathe-Kochbuch

Mathematik 3 für Ingenieure: Leckere Rezepte mit
Differentialgleichungen

Dominic Griesel

24. Februar 2011

Ausgabe

3. Erste Schritte

Los gehts! Aber fangen wir erst mal mit etwas einfachem an. In diesem Abschnitt behandle ich die ersten Lösungsmethoden für DGLen. Es handelt sich hierbei um DGLen die bereits in einer speziellen Form sind, und sich daher ohne großen Aufwand lösen lassen.

3.1. DGL mit getrennten Variablen

Ist die DGL in expliziter Form und setzt sich die rechte Seite aus einem Produkt zwei Funktionen zusammen, die jeweils nur von einer Variable (nämlich x und y , oder t und y , oder ...) abhängen, so spricht man von einer DGL *mit getrennten Variablen*:

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

Voraussetzung für diese Methode ist, dass die Funktion $h(y)$ Lipschitz-stetig ist. Wir bringen $h(y)$ auf die andere Seite und erinnern uns daran, dass y eigentlich $y(t)$ ist:

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t)$$

Oft hilft es, y' als $\frac{dy}{dt}$ zu schreiben. Hier machen wir aber erst mal allgemein weiter. Grade noch vom Startzeitpunkt bis jetzt integrieren:

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(\bar{t})}{h(y(\bar{t}))} d\bar{t} = \int_{t_0}^t g(\bar{t}) d\bar{t}$$

Wer sich jetzt an seine Schulzeit erinnert, dem fällt sicher auf, dass wir hier eine Integration mit Substitution durchführen können. Mit $f = y(t)$ folgt:

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(f)} df = \int_{t_0}^t g(\bar{t}) d\bar{t}$$
$$H(y) - H(y_0) = G(t) - G(t_0)$$

Wobei G, H Stammfunktionen von $g, \frac{1}{h}$ sind. Eventuell kann man das ganze nach y auflösen, muss aber nicht gehen.

Wenn man keine Anfangswerte hat, integriert man besser unbestimmt. So spart man sich eine Konstante in der Gleichung. Das geht übrigens auch, wenn man Anfangswerte hat. Die Integrationskonstante kann man dann durch Einsetzen bestimmen.

3.2. Ähnlichkeits-DGL

Eine explizite DGL, bei der die rechte Seite von $\frac{y}{x}$ abhängt, nennt man *Ähnlichkeits-DGL*:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \in J$$

Wenn $f(z)$ nicht überall gleich z ist, f Lipschitz-stetig ist, und J nicht 0 beinhaltet, dann kann man folgenden Ansatz machen:

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{y(x)}{x} && \text{umgestellt nach } y \\ x \cdot z(x) &= y(x) && \text{ableiten und links die Produktregel beachten} \\ z + xz' &= y' && \end{aligned}$$

Das setzen wir nun als linke Seite unserer DGL ein, rechts wird der eigentliche Ansatz eingesetzt:

$$\begin{aligned} z + xz' &= f(z) \\ z' &= \frac{1}{x}(f(z) - z) \end{aligned}$$

Damit haben wir eine DGL mit getrennten Variablen, die wir bereits lösen können. Am Ende aber nicht die Rücksubstitution vergessen, wir suchen schließlich $y(x)$ und nicht $z(x)$! Gibt es Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$, dann gilt $z_0 = \frac{y_0}{x_0}$. Um Anfangswertprobleme zu lösen, setzt man die Anfangswerte ein und löst anschließend nach der Konstanten auf.

3.3. Lineare DGL 1. Ordnung

Auf zum nächsten Typ! Eine DGL, in der nur die 1. Ableitung von y , y selbst mit einem Vorfaktor und eventuell noch ein Term $g(x)$, der nicht von y abhängt, vorkommen, nennt man *Lineare DGL 1. Ordnung*:

$$y' = p(x) \cdot y + g(x)$$

Fällt der Term $g(x)$ weg, dann spricht man von einer *homogenen* DGL, sonst von einer *inhomogenen*.

3.3.1. Lösungsweg

Um diese Gleichungen zu lösen, geht man folgendermaßen vor:

1. Bestimmen der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL. Dazu ignoriert man $g(x)$ und löst mittels Trennung der Variablen:

$$y'_H = p(x) \cdot y$$

2. Finden einer partikulären Lösung y_P der inhomogenen - also der eigentlichen - DGL. Die lässt sich in manchen Fällen durch Raten finden, wenn nicht, gibt es weitere Methoden. Dieser Schritt kann weggelassen werden, wenn die DGL von vornherein homogen war.
3. Die allgemeine Lösung der DGL setzt sich zusammen aus der homogenen und der partikulären Lösung:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

Als nächstes stelle ich die Methoden zum Finden der partikulären Lösung vor.

3.3.2. Variation der Konstanten

Hat man die homogene DGL gelöst, erhält man in der Regel eine Funktion der Form $y_H(x) = C \cdot f(x)$. Die Idee ist nun, statt der Konstanten C eine Funktion zu nehmen, die von x abhängt:

$$y_P(x) = C(x) \cdot f(x) \quad (3.1)$$

Nun leitet man das ganze ab, dabei die Produktregel beachten:

$$y'_P(x) = C'(x) \cdot f(x) + C(x) \cdot f'(x) \quad (3.2)$$

Als nächstes setzt man 3.2 in die linke Seite der DGL ein (für y') und 3.1 auf der rechten Seite (für y). Das vereinfacht sich dann schön und wir bekommen eine neue DGL - diesmal für $C(x)$, die wir lösen können. Die Integrationskonstante ist hier egal, wir suchen schließlich nur eine partikuläre Lösung. Daher wird sie zu Null gesetzt.

Die allgemeine Lösung mithilfe Variation der Konstanten kann damit schreiben als

$$y(x) = e^{P(x)} \cdot \left(\int_{x_0}^x g(\bar{x}) e^{-P(\bar{x})} d\bar{x} + C \right) \quad (3.3)$$

mit $P(x) = \int p(\bar{x}) d\bar{x}$.

3.3.3. Partikulärlösung durch Ansatz

Wenn der Vorfaktor $p(x)$ von y eine Konstante ist, also $y' = ky + g(x)$, kann man häufig die partikuläre Lösung durch einen Ansatz bestimmen. Dazu schaut man sich die Inhomogenität $g(x)$ an und sucht sich den passenden Fall aus folgender Tabelle:

$g(x)$	$y_P(x)=$
$\sum_{i=0}^n a_i x^i$ Also ein Polynom (z.B. $x^3 - x^2$)	$\sum_{i=0}^n A_i x^i$
$a e^{\lambda x}$ Achtung: $\lambda \neq k$	$A e^{\lambda x}$
$a e^{kx}$	$A x e^{kx}$
$a_1 \cos(bx) + a_2 \sin(bx)$	$A_1 \cos(bx) + A_2 \sin(bx)$
$e^{\lambda x} (a_1 \cos(bx) + a_2 \sin(bx))$	$e^{\lambda x} (A_1 \cos(bx) + A_2 \sin(bx))$

Auch wenn bei $g(x)$ einige Terme fehlen, muss trotzdem der gesamte Ansatz genommen werden. Anschließend können die Konstanten A_i durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

3.4. Bernoulli-DGL

Eine DGL der Form

$$y' = p(x)y + r(x)y^n, \quad n \neq 0, 1$$

nennt man *Bernoullische DGL*. Diese löst man mit dem Ansatz

$$z(x) = y^{1-n}.$$

Das führt mit der Kettenregel zu

$$\begin{aligned} z' &= (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y' \\ z' &= (1-n) \cdot y^{-n} \cdot (p(x)y + r(x)y^n) \\ z' &= (1-n) \cdot (p(x)y^{1-n} + r(x)) \\ z' &= (1-n) \cdot (p(x)z(x) + r(x)) \end{aligned}$$

Damit ist die DGL in einer Form, die wir bereits lösen können (siehe Abschnitt 3.3.1, Seite 14).

3.5. Exakte DGL

Die DGL

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0, \quad (x, y) \in D \tag{3.4}$$

heißt *exakt*, wenn man f und g stetig partiell differenzieren kann und für alle $x, y \in D$

$$f_y(x, y) = g_x(x, y) \tag{3.5}$$

gilt. Stetig partiell differenzierbar heißt, dass man die Funktionen partiell ableiten kann und die Ableitungen stetig sind. Es könnte auch sein, dass die Funktion in dieser Form angegeben ist:

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0.$$

Das macht nix, wir dividieren durch dx und erhalten die Form aus Gleichung (3.4).

Dann nämlich haben die Funktionen f und g das Potential $u(x, y)$ (Begründung siehe Mathe 2-Skript). u lässt sich berechnen mit

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y g(x_0, \bar{y}) d\bar{y} + \int_{x_0}^x f(\bar{x}, y) d\bar{x}.$$

Sind keine Anfangswerte gegeben, setzt man x_0 und y_0 am besten gleich 0. Die allgemeine Lösung der DGL ist dann gegeben durch

$$u(x, y) = C$$

mit einer Konstante C . Wenn möglich, muss man diese Gleichung dann noch nach $y(x)$ oder $x(y)$ auflösen.

3.6. Integrierender Faktor

Sieht die DGL aus wie eine exakte DGL, aber die Bedingung (3.5) ist nicht erfüllt, so kann man einen Trick anwenden, um die DGL exakt zu machen. Man multipliziert die Gleichung mit einem noch unbekanntem Faktor $M(x, y)$. M nennt man den *integrierenden Faktor*.

$$\underbrace{M(x, y)f(x, y)}_{\tilde{f}(x, y)} + \underbrace{M(x, y)g(x, y)}_{\tilde{g}(x, y)} \cdot y' = 0$$

Schaut man sich nun die Bedingung (3.5) an, so ergibt sich mit der Produktregel (wir müssen jetzt schauen, ob $\tilde{f}_y = \tilde{g}_x$ ist)

$$M_y(x, y) \cdot f(x, y) + M(x, y) \cdot f_y(x, y) = M_x(x, y) \cdot g(x, y) + M(x, y) \cdot g_x(x, y).$$

Das hat das ganze natürlich enorm vereinfacht. Nein Spaß beiseite, jetzt müssen wir eine Annahme treffen. Wir gehen davon dass $M(x, y)$ nur von y abhängt, also $M(y)$ heißt. Dann ist nämlich $M_x = 0$ und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$M_y(x, y) \cdot f(x, y) + M(x, y) \cdot f_y(x, y) = M(x, y) \cdot g_x(x, y).$$

Aufgelöst nach M_y sieht das so aus:

$$M'(y) = M(y) \frac{g_x(x, y) - f_y(x, y)}{f(x, y)}.$$

Das können wir hoffentlich lösen. Die Integrationskonstante setzen wir gleich 0, denn wir suchen nur einen einzigen Faktor. Taucht in dieser Gleichung nach dem Vereinfachen aber noch ein x auf, so war unsere Annahme falsch, denn wir haben gesagt, M hängt nur von y ab. Dann probieren wir es halt nochmal und nehmen diesmal an, dass M nur von x abhängt. Dann ist $M_y = 0$.

Nr. 2: Partikulärlösung durch Ansatz

Wir haben die DGL

$$y' = 2y + x^2$$

und wollen eine partikuläre Lösung durch Ansatz finden. Wir lesen ab

$$g(x) = x^2.$$

Das entspricht der ersten Zeile unserer Tabelle, damit haben wir den Ansatz

$$y_P = Ax^2 + Bx + C \quad \text{und}$$

$$y'_P = 2Ax + B$$

Eingesetzt in die DGL ergibt das

$$2Ax + B = 2(Ax^2 + Bx + C) + x^2 \quad \text{bzw.}$$

$$2Ax + B = (2A + 1)x^2 + 2Bx + 2C$$

Jetzt müssen wir alle Koeffizienten (Vorfaktoren) vergleichen, denn auf beiden Seiten müssen die gleichen stehen, damit die Gleichung erfüllt ist:

$$0 = 2A + 1 \quad \text{Vorfaktoren von } x^2$$

$$2A = 2B \quad \text{Vorfaktoren von } x$$

$$B = 2C \quad \text{Absolute Glieder}$$

Wir könnten auch alles auf eine Seite bringen:

$$0 = (2A + 1)x^2 + 2(B - A)x + (2C - B)$$

Dann müssen die Klammern 0 sein, damit das erfüllt ist. Damit haben wir wieder 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten A, B, C . Das führt auf die Lösungen

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$C = -\frac{1}{4}$$

Und wir haben

$$y_P = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

4. Existenz und Eindeutigkeit

Es gibt Verfahren, um die Existenz der Lösung einer DGL zu bestimmen und herauszufinden, ob diese eindeutig sind.

4.1. Satz von Peano

Gegeben ist die DGL mit Anfangswertproblem

$$y' = F(x, y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad x \in J, y \in D$$

Dabei ist $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ (x_0 ist der Mittelwert des Intervalls, δ die halbe Breite), D fasst man als Kugel im \mathbb{R}^n auf, mit Radius ρ um y_0 . In den meisten Fällen befinden wir uns in \mathbb{R} , dann ist D einfach das Intervall $[y_0 - \rho, y_0 + \rho]$. Ansonsten ist D so angeben: $D = \{y : \|y - y_0\| \leq \rho\}$.

Der Satz von Peano besagt, dass in dem Intervall $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ (mindestens) eine Lösung existiert, wenn F auf $J \times D$ stetig ist. δ_1 ist dabei größer als 0 und höchstens so groß wie δ .

Das bringt uns aber nicht viel, wenn wir nicht wissen, wie groß δ_1 ist. Um es zu finden, müssen wir zunächst die rechte Seite der DGL abschätzen:

$$\|F(x, y)\| \leq M$$

Haben wir ein M gefunden, das diese Bedingung auf dem gesamten Definitionsgebiet $J \times D$ erfüllt, geht es weiter. Aus den Angaben von J und D lesen wir δ und ρ ab. Dann ist

$$\delta_1 = \min \left\{ \delta, \frac{\rho}{M} \right\},$$

also die kleinere der beiden Zahlen.

4.2. Satz von Picard-Lindelöf

Der Satz von Picard-Lindelöf verschärft das ganze etwas. D hat jetzt keinen Rand mehr, das sieht dann so aus: $D = \{y : \|y - y_0\| < \rho\}$. Macht aber nix. Außerdem setzt er voraus, dass F auf dem gesamten Bereich $J \times D$ Lipschitz-stetig ist.

Der Satz von Picard-Lindelöf besagt also, dass im Intervall $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ *genau* eine Lösung existiert, wenn F auf $J \times D$ stetig *und* Lipschitz-stetig bezüglich y ist.

6. Lineare DGLen n -ter Ordnung

Jetzt kommen meine Lieblinge:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y(x) = g(x).$$

Gleichungen dieser Art nennt man *lineare DGL n -ter Ordnung*. Meistens haben sie noch Anfangswerte:

$$y^{(i)}(x_0) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Nochmal auf Deutsch: Das sind Gleichungen, bei denen die Ableitungen (nicht zwangsläufig alle) bis zur n -ten auftauchen, und bei denen für die Funktion y und ihre Ableitungen bis zum Grad $n - 1$ an einer Stelle Anfangswerte vorgegeben sind.

Das schöne an ihnen ist, dass man sie immer auf die gleiche Weise lösen kann, sofern die Vorfaktoren konstant sind, aber dazu später mehr. Die allgemeine Lösung einer linearen DGL n -ter Ordnung setzt sich aus einem sogenannten Fundamentalsystem zusammen. Das sind n Funktionen y_1 bis y_n , die linear unabhängig sind:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x).$$

6.1. Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Wie findet man nun heraus, ob Funktionen linear unabhängig sind? Das macht man mit der *Wronskischen Matrix* und ihrer Determinante. In der Wronski-Matrix stehen in der ersten Zeile die Funktionen y_1 bis y_n , darunter ihre ersten Ableitungen, und so weiter bis zu den $(n - 1)$ -ten Ableitungen. Die Wronski-Matrix ist also eine $n \times n$ -Matrix und sieht so aus:

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix, bzw. ihre Determinante hat folgende Eigenschaften:

- Wenn die Funktionen y_1 bis y_n linear abhängig sind, dann ist $\det(W(x)) = 0$ für alle x . Der Umkehrschluss gilt nicht!
- Wenn es allerdings ein x gibt, für das die Determinante ungleich 0 wird, dann sind y_1 bis y_n linear unabhängig.
- Wenn für alle x die Determinante $\det(W(x)) \neq 0$ ist, dann bilden die Funktionen y_1 bis y_n ein Fundamentalsystem.

6.2. Lösungsweg

Also, wie löst man nun diese Gleichungen? Mit dem Lambda-Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

knackt man die zugehörige homogene DGL. Bei jedem Ableiten kommt hier nämlich nur ein Faktor λ dazu. Anschließend kann man $e^{\lambda x}$ ausklammern und erhält eine Gleichung dieser Form:

$$p(\lambda) \cdot e^{\lambda x} = 0.$$

Die e-Funktion wird nicht 0, also müssen wir nur noch die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* $p(\lambda)$ finden. Diese Nullstellen λ_1 bis λ_n nennt man die Eigenwerte der DGL. Die allgemeine Lösung der DGL ist dann

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Auch komplexe Eigenwerte sind hier erlaubt, also nicht aufhören, wenn wir eine Wurzel aus etwas negativem bekommen. Dazu erinnern wir uns an die *eulersche Formel*:

$$\begin{aligned} e^{(a+ib)\cdot x} &= e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx)) && \text{bzw.} \\ e^{(a-ib)\cdot x} &= e^{ax}(\cos(bx) - i \sin(bx)) \end{aligned}$$

Da komplexe Eigenwerte immer in konjugiert komplexen Paaren (also $a + ib, a - ib$) auftauchen, erhalten wir dann immer diese zwei Funktionen als Lösungspaar. Eigentlich wollten wir aber reelle Lösungen und nicht komplexe. Daher nutzen wir aus, dass auch jede Linearkombination unserer Lösungen als Lösung taugt. Addieren wir unsere zwei Lösungen und teilen durch zwei, bleibt gerade noch $e^{ax} \cos(bx)$ übrig. Subtrahieren wir die zweite von der ersten und teilen durch $2i$, bekommen wir $e^{ax} \sin(bx)$. Also sind bei einem Paar komplexer Eigenwerte $a + ib, a - ib$ diese hier unsere Lösungen:

$$e^{ax} \cos(bx) \quad \text{und} \quad e^{ax} \sin(bx)$$

Aufpassen, wenn ein Eigenwert mehrfach auftaucht. Dann kann man nicht einfach mehrmals e hoch den selben Eigenwert schreiben. Stattdessen müssen die Funktionen mit dem selben Eigenwert dann lauten:

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots$$

Angenommen das charakteristische Polynom hat die dreifache Nullstelle $\lambda = 3$. Dann ist die Lösung der zugehörigen DGL

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 x^2 e^{3x}.$$

Wenn wir unsere Lösung der homogenen DGL haben, können wir z.B. mit Partikulärlösung durch Ansatz (Abschnitt 3.3.3, Seite 15) eine partikuläre Lösung bestimmen.

7.5. Jordan-Normalform

Ich hab's mir anders überlegt, hier muss noch was hin. Aber danach gibt es wirklich Beispiele, versprochen! Wenn man für den Fall 2 die Eigen- und Hauptvektoren ausgerechnet hat, dann kann man diese nebeneinander in eine Matrix T schreiben. Berechnet man dann $T^{-1}AT$, erhält man die *Jordan-Normalform* J , die aus einem oder mehreren Jordan-Kästchen besteht. Ein Jordan-Kästchen ist eine quadratische Matrix, die auf allen Elementen der Diagonalen einen Eigenwert stehen hat. Auf der Diagonalen darüber sind 1er angeordnet:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Damit kann man sicher ganz tolle Dinge anstellen, die uns hier aber nicht interessieren. Endlich geschafft! Hier sind die versprochenen Beispiele.

7.6. Beispiele

7.6.1. Beispiele zur Diagonalähnlichkeit

Nr. 1

Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalähnlich?

Lösung: Wir berechnen die Eigenwerte und erhalten $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$. 3 ist ein doppelter Eigenwert, Fall 1 ist es also nicht. Wir überprüfen, ob die Beziehung (7.1) gilt. Zunächst für λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned} 3 - \text{Rang} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &\stackrel{?}{=} 2 && \text{1. zu 2. Zeile addieren} \\ 3 - \text{Rang} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &\stackrel{?}{=} 2 && \text{3. von 2. Zeile subtrahieren} \\ 3 - \text{Rang} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\stackrel{?}{=} 2 && \text{wir haben zwei Zeilen übrig} \\ &&& 1 \neq 2. \end{aligned}$$

Fall 2 ist es also auch nicht. Es könnte aber noch Fall 3 sein. Von λ_1, λ_2 wissen wir bereits,

dass der Rang der Matrix 2 ist, schnell noch für $\lambda_3 = 0$ überprüfen:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

Also ist für alle Eigenwerte $\text{Rang}(A - \lambda E) = n - 1$, das ist daher ein Fall 3.

Nr. 2

In dem Beispiel war ja fast alles drin, hier mal ein Beispiel, das funktioniert: Ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

diagonalähnlich?

Lösung: Wir berechnen wieder die Eigenwerte. Das ist zwar ein wenig umständlich, aber wir erhalten irgendwann hoffentlich $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6$. Die Matrix ist daher diagonalähnlich.

7.6.2. Beispiele zu Linearen Systemen 1. Ordnung

Gegeben ist das lineare inhomogene System

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen zunächst die homogene Lösung. Dafür müssen wir wissen, ob die Matrix diagonalähnlich ist oder welchem der anderen Fälle sie entspricht. Die Berechnung der Eigenvektoren ergibt $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. Die Matrix ist also diagonalähnlich (Fall 1). Jetzt brauchen wir die Eigenvektoren. Zunächst für λ_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir brauchen uns hier nur eine der Zeilen anschauen, da sie sowieso linear abhängig sind. Außerdem können wir einen Wert frei wählen (außer 0). Wählen wir in der ersten Zeile $t_2 = 1$, so erhalten wir $t_1 = 2$ und damit den 1. Eigenvektor $\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für λ_2 ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir wieder $t_2 = 1$, ergibt sich diesmal $t_1 = -1$ und damit $\vec{t}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$f(t)$	$F(s)$
$\sin(t)$	$\frac{1}{1+s^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{a^2+s^2}$
$\cos(t)$	$\frac{s}{1+s^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{a^2+s^2}$
$\sinh(t)$	$\frac{1}{s^2-1} \quad s > 1$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2} \quad s > 1$
$\cosh(t)$	$\frac{s}{s^2-1} \quad s > 1$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2} \quad s > 1$

9.3. Partialbruchzerlegung

Wie bereits erwähnt, werden wir häufig die Partialbruchzerlegung brauchen, wenn wir eine DGL mithilfe der Laplace-Transformation lösen wollen. Wenn wir einen Bruch der Form

$$\frac{a + bs + cs^2 + \dots}{m + ns + os^2 + \dots}$$

haben, können wir ihn in eine Form bringen, bei der der Nenner nur aus Produkten besteht. Dafür suchen wir die Nullstellen des Nenners λ_1 bis λ_n , die durchaus komplex sein können und schreiben den Bruch um. Anschließend wollen wir ihn in mehrere Partialbrüche zerlegen, die als Nenner die Faktoren unseres eigentlichen Nenners haben. Dafür machen wir diesen Ansatz:

$$\frac{a + bs + cs^2 + \dots}{(s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_n)} = \frac{A}{s - \lambda_1} + \frac{B}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{N}{s - \lambda_n}.$$

Die linke Seite ist unser Bruch mit den berechneten Faktoren im Nenner, die Konstanten A, B, \dots auf der rechten Seite müssen wir bestimmen. Das geht, indem wir die rechte Seite auf einen Hauptnenner bringen. Das wird der gleiche sein wie links. Danach machen wir einen Koeffizientenvergleich, um die Konstanten zu erhalten. Später gibts ein Beispiel dazu.

Sollte im Nenner ein Faktor doppelt vorkommen, müssen ihn wir auf der rechten Seite auch doppelt einbauen. Haben wir also einen Faktor $(s - 2)^3$ im Nenner der linken Seite,

entspricht das drei Partialbrüchen auf der rechten:

$$\frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s-2)^3}.$$

Bekommen wir komplexe Eigenwerte (zur Erinnerung, die treten immer nur in Paaren auf), so müssen unsere Konstanten für diese Brüchen auch konjugiert komplex sein. Hier ein kurzes Beispiel dazu:

$$\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{a+bi}{s+i} + \frac{a-bi}{s-i}.$$

Die Nenner auf der rechten Seite sind die Nullstellen von s^2+1 . Bringen wir die Brüchen auf der rechten Seite auf einen Nenner, ergibt sich

$$\frac{a+bi}{s+i} + \frac{a-bi}{s-i} = \frac{(a+bi)(s-i) + (a-bi)(s+i)}{s^2+1} = \frac{as+b+as+b}{s^2+1}.$$

Da a und b Konstanten sind, können wir auch einfach schreiben $\frac{As+B}{s^2+1}$. Etwas allgemeiner: Haben wir die beiden komplexen Nullstellen $a+bi$, $a-bi$, wird daraus ein Term

$$\frac{As+B}{(s-(a+bi)) \cdot (s-(a-bi))} = \frac{As+B}{s^2-2as+a^2+b^2}.$$

Natürlich können auch komplexe Nullstellen mehrfach vorkommen. Dann verfährt man wie bei mehrfachen reellen Nullstellen: Der Term im Nenner wird potenziert und in mehrere Brüchen gepackt.

9.4. Lösung von DGLn mithilfe der Laplace-Transformation

Jetzt haben wir das Handwerkszeug drauf, um DGLn mit Anfangswertproblemen zu lösen. Das läuft in 4 (mehr oder weniger) einfachen Schritten ab:

1. Laplace-Transformation der DGL oder des Systems
2. Auflösen der entstandenen Gleichung(en) nach $F(s)$ ($G(s), H(s), \dots$)
3. Partialbruchzerlegung der Lösungen. Kann in manchen Fällen durch *scharfes Hinsehen* eingespart werden.
4. Rücktransformation. Dabei müssen eventuell einige der oben genannten Sätze angewendet werden. Dieser Schritt kann sich schwierig gestalten.

Tadaaa, fertig! Keine Eigenwertberechnung, keine Fundamentalsysteme, kein Bestimmen der Integrationskonstanten, ...

So das soll es an Theorie gewesen sein, jetzt kommen Beispiele!

9.5. Beispiele zur Laplace-Transformation

9.5.1. Berechnen der Transformation

Transformation von e^{3t}

Wir setzen in die Definition ein und legen los:

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{3t} dt.$$

Das ist ein uneigentliches Integral. Wir führen daher einen Grenzwert ein. Außerdem fassen wir die e -Funktionen zusammen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{3t}\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{t(3-s)} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3-s} e^{t(3-s)} \right]_0^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3-s} (e^{x(3-s)} - 1). \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nur, wenn $(3-s)$ negativ ist, da sonst die e -Funktion unbeschränkt wächst. Wir legen also fest, dass $s > 3$ ist und fahren fort:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{3t}\} &= \frac{1}{3-s} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{s-3}. \end{aligned}$$

Ein kleiner Blick auf die Tabelle zeigt, dass wir richtig gerechnet haben. Außerdem stimmt unsere Einschränkung $s > 3$.

Transformation von e^{t^2}

Der gleiche Ansatz ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{t^2}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{t^2} dt. \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{t(t-s)} dt. \end{aligned}$$

Und jetzt? Damit das Integral existiert, muss der Exponent negativ sein, also $s > t$. Da wir aber t gegen unendlich laufen lassen, muss s unendlich sein. Also existiert die Laplace-Transformation nicht. Das liegt daran, dass e^{t^2} schneller wächst als e^{-st} fällt.

Anfangswertproblem

Oft werden bei der Wellengleichung auch noch die Anfangsauslenkung und die Anfangsgeschwindigkeit vorgegeben:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x).$$

Dieses Problem entspricht einer unendlich langen Saite (wir haben keine Einspannung). Das müssen wir jetzt verarbeiten. Dazu setzen wir zunächst die erste Bedingung in unsere allgemeine Lösung ein:

$$u(x, 0) = w_1(x) + w_2(x) = u_0(x). \quad (11.2)$$

Für die zweite Bedingung brauchen wir die Ableitung der allgemeinen Lösung:

$$u_t(x, t) = w_1'(x + ct) \cdot c + w_2'(x - ct) \cdot (-c).$$

Setzen wir jetzt ein, ergibt sich

$$u_t(x, 0) = cw_1'(x) - cw_2'(x) = v_0(x)$$

bzw.

$$w_1'(x) - w_2'(x) = \frac{1}{c}v_0(x).$$

Wir integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} w_1(x) - w_2(x) - \underbrace{(w_1(x_0) - w_2(x_0))}_{=k} &= \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(\bar{x}) d\bar{x} \\ w_1(x) - w_2(x) &= \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(\bar{x}) d\bar{x} + k. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Die Konstante k ist beliebig, sie verabschiedet sich nämlich gleich. Addieren wir die Gleichungen (11.2) und (11.3), ergibt sich

$$\begin{aligned} 2w_1(x) &= u_0(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(\bar{x}) d\bar{x} + k \\ w_1(x) &= \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x v_0(\bar{x}) d\bar{x} + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir sie, bekommen wir

$$\begin{aligned} 2w_2(x) &= u_0(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(\bar{x}) d\bar{x} - k \\ w_2(x) &= \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x v_0(\bar{x}) d\bar{x} - \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist damit

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= w_1(x + ct) + w_2(x - ct) \\
 &= \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} v_0(\bar{x}) d\bar{x} - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} v_0(\bar{x}) d\bar{x} \\
 &= \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} v_0(\bar{x}) d\bar{x} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x_0} v_0(\bar{x}) d\bar{x} \\
 u(x, t) &= \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\bar{x}) d\bar{x}.
 \end{aligned}$$

Das ist die *Formel von d'Alembert*.

Die Lösung zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort hängt also nur von dem Zustand zum Anfangszeitpunkt ab.

Anfangs-Randwertproblem

Wir wollen das gleiche Problem wie eben mit einer Saite endlicher Länge betrachten, die am Rand eingespannt ist. Damit haben wir die DGL

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

mit den Anfangswerten

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x)$$

und den Randbedingungen

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Die Saite der Länge L bewegt sich also an beiden Enden zu keinem Zeitpunkt. Die Physik liefert uns das Phänomen der stehenden Wellen, die zum Produktansatz nach Bernoulli führen:

$$u(x, t) = v(x) \cdot w(t).$$

Es gibt noch einen anderen Grund für den Produktansatz: separierte Randbedingungen. Das heißt, dass wir Bedingungen haben, in denen nur x auftaucht, und welche, in denen nur t auftaucht. Hier kommt man in der Regel mit einem Produktansatz zum Ziel.

Damit können wir unsere Randbedingungen umschreiben zu

$$v(0) = v(L) = 0.$$

Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$c^2 v''(x)w(y) - v(x)w''(y) = 0,$$